



TITLE:

# Penrose-Fife型の液体－固体相転移モデルに対する解の一意存在性について(変分問題とその周辺)

AUTHOR(S):

伊藤, 昭夫

---

CITATION:

伊藤, 昭夫. Penrose-Fife型の液体－固体相転移モデルに対する解の一意存在性について(変分問題とその周辺). 数理解析研究所講究録 2006, 1464: 93-106

ISSUE DATE:

2006-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/48014>

RIGHT:

# Penrose-Fife 型の液体—固体相転移モデルに対する 解の一意存在性について

近畿大学・工学部 伊藤 昭夫 (Akio Ito)

Department of Electronic Engineering and Computer Science  
School of Engineering, Kinki University

## 1. 序

1990 年に O. Penrose と P.C. Fife によって [7] で提唱された保存量を有しない相転移現象（例えば、液体—固体相転移現象）を記述する非線形放物型偏微分方程式系は次の通りである。

$$\frac{de}{dt} - \Delta \left( -\frac{1}{\theta} \right) = 0, \quad e = \theta + \lambda(w) \quad \text{a.e. in } Q_T := \Omega \times (0, T), \quad (1.1)$$

$$\frac{dw}{dt} - \kappa \Delta w + g(w) + \frac{\lambda'(w)}{\theta} = 0 \quad \text{a.e. in } Q_T. \quad (1.2)$$

ここで、 $e$  は内部エネルギー密度、 $\theta$  は絶対温度、 $w$  は物質の相を表す秩序変数をそれぞれ意味する。また、“保存量を有しない”とは秩序変数  $w$  が保存量を有しないということの意味する。

次に、熱流  $\nabla \left( -\frac{1}{\theta} \right)$  と相変化の勾配流  $\nabla w$  に対して共に斉次 Neumann 境界条件、つまり、

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left( -\frac{1}{\theta} \right) = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{a.e. on } \Sigma_T := \Gamma \times (0, T) \quad (1.3)$$

を課す。ここで、 $\Omega$  は  $\mathbf{R}^N$  ( $N = 1, 2, 3$ ) における有界領域でその境界  $\Gamma := \partial\Omega$  は十分滑らかとし、 $\nu$  は  $\Gamma$  上の各点における外向き単位法線ベクトルを表す。

更に、 $\theta$  と  $w$  に対して初期条件

$$\theta(0) = \theta_0, \quad w(0) = w_0 \quad \text{a.e. in } \Omega \quad (1.4)$$

を課す。

本論文を通して、 $\{(1.1)-(1.4)\}$  の初期値—境界値問題を (P) で表す。(P) の大きな特徴は、内部エネルギー密度  $e$  が保存量を有することである。実際、(1.1) かつ (1.3) より

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} e(t) = 0 \quad \text{a.e. } t \in (0, T)$$

が成り立つので、

$$\int_{\Omega} e(t) = \int_{\Omega} \{\theta_0 + \lambda(w_0)\}, \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.5)$$

が得られる。

本論文の目的は、(P) の解の一意存在性を証明することである。そのために、本節の最後に本論文で使用する記号を導入するとともに、(P) の解の定義を明確に与える。

(1)  $1 \leq \forall p \leq \infty$  に対して,  $L^p(\Omega)$  のノルムを  $|\cdot|_p$  で表す. 特に,  $H := L^2(\Omega)$  とし,  $L^2$ -内積を  $(\cdot, \cdot)$  で表す.

(2)  $V := H^1(\Omega)$  とし,  $V$ -内積  $(\cdot, \cdot)_V$  を

$$(v, w)_V := \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w + (v, w), \quad \forall v, w \in V$$

で与え,  $V$ -ノルムを  $\|v\| := \sqrt{(v, v)_V}$  で定義する. また,  $V^*$  と  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  でそれぞれ  $V$  の共役空間と  $V^*$  と  $V$  の共役対を表す.

(3)  $H_0 := \{z \in H \mid \int_{\Omega} z = 0\}$  は  $H$  の閉部分空間であり,  $H_0$ -内積および  $H_0$ -ノルムはそれぞれ  $H$  から誘導する. 更に,  $V_0 := V \cap H_0$  とし,  $V_0^*$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ ,  $F_0$  でそれぞれ  $V_0$  の共役空間,  $V_0^*$  と  $V_0$  の共役対,  $V_0$  から  $V_0^*$  への共役写像を表す. このとき,  $V_0$ -内積を

$$(v, w)_{V_0} := \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w, \quad \forall v, w \in V_0$$

で与え,  $V_0$ -ノルムを  $\|v\|_0 := \sqrt{(v, v)_{V_0}}$  で定義すれば,

$$\langle F_0 v, w \rangle_0 = (v, w)_{V_0}, \quad \forall v, w \in V_0$$

が成り立つとともに,  $V_0^*$ -内積  $(\cdot, \cdot)_{0*}$  と  $V_0^*$ -ノルムはそれぞれ次で定義される:

$$(v^*, w^*)_{0*} := \langle v^*, F_0^{-1} w^* \rangle_0 = \langle w^*, F_0^{-1} v^* \rangle_0, \quad \forall v^*, w^* \in V_0^*,$$

$$\|v^*\|_{0*} := \sqrt{(v^*, v^*)_{0*}} = \|F_0^{-1} v^*\|_0, \quad \forall v^* \in V_0^*.$$

以上の記号を用いて, (P) の解の定義を明確に与える.

**定義 1.1.**  $(e, w)$  が (P) の解であるとは, 次の条件 (w1)-(w7) をすべて満たすことである:

(w1)  $e \in W^{1,2}(0, T; V^*) \cap L^\infty(0, T; H)$ .

(w2)  $w \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$ .

(w3)  $\theta = e - \lambda(w) > 0$  a.e. in  $Q_T$ .

(w4)  $\frac{1}{\theta} \in L^2(0, T; V)$ .

(w5) (1.1) は次の意味で成り立つ:

$$\langle e'(t), z \rangle + \int_{\Omega} \nabla \left( -\frac{1}{\theta} \right) \cdot \nabla z = 0, \quad \forall z \in V, \quad \text{a.e. } t \in (0, T). \quad (1.6)$$

(w6) (1.2) は次の意味で成り立つ:

$$(w'(t), z) + \kappa \int_{\Omega} \nabla w(t) \cdot \nabla z + \left( g(w(t)) + \frac{\lambda'(w(t))}{\theta(t)}, z \right) = 0, \quad (1.7)$$

$$\forall z \in V, \quad \text{a.e. } t \in (0, T).$$

$$(w7) \quad e(0) = e_0 := \theta_0 + \lambda(w_0), \quad w(0) = w_0.$$

ここで、 $e'$  と  $w'$  はそれぞれ  $\frac{de}{dt}$  と  $\frac{dw}{dt}$  をそれぞれ表す。

## 2. 主定理

本節では、本論文で得られた定理について述べる。

そのために、まず方程式系に現れる非線形項  $\lambda$  と  $g$  および初期値  $\theta_0$  と  $w_0$  の仮定を明確に与える。

(A1)  $\lambda \in C^2(\mathbf{R})$  かつ  $\lambda'' \in L^\infty(\mathbf{R})$ . ここで、 $|\lambda''|_\infty := \sup_{r \in \mathbf{R}} \lambda''(r)$  とおく。このとき、次の評価が成り立つ：

$$\exists c_1 > 0 \quad \text{s.t.} \quad |\lambda(r)| \leq c_1(r^2 + 1), \quad \forall r \in \mathbf{R}, \quad (2.1)$$

$$\exists c_2 > 0 \quad \text{s.t.} \quad |\lambda'(r)| \leq c_2(|r| + 1), \quad \forall r \in \mathbf{R}. \quad (2.2)$$

(A2)  $g \in C^1(\mathbf{R})$ . 更に、次の条件を満たす：

$$\exists c_3 > 0 \quad \text{s.t.} \quad |g(r)| \leq c_3(|r|^3 + 1), \quad \forall r \in \mathbf{R}, \quad (2.3)$$

$$\exists c_4 > 0 \quad \text{s.t.} \quad (g(r_1) - g(r_2))(r_1 - r_2) \geq -c_4|r_1 - r_2|^2, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbf{R}, \quad (2.4)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow -\infty} g(r) = -\infty. \quad (2.5)$$

次に、 $g$  の原始関数を  $\hat{g}$  で表す。このとき、(2.5) より

$$\hat{g}(r) \geq 0, \quad \forall r \in \mathbf{R} \quad (2.6)$$

としても一般性を失わない。更に、 $\hat{g}$  に対して次の条件を課す：

$$\exists c_5 > 0, \exists c_6 > 0 \quad \text{s.t.} \quad \hat{g}(r) \geq c_5 r^4 - c_6, \quad \forall r \in \mathbf{R}. \quad (2.7)$$

(A3)  $\theta_0 \in H$ ,  $|\int_\Omega \log \theta_0| < +\infty$ ,  $\theta_0 > 0$  a.e. in  $\Omega$ .

(A4)  $w_0 \in V$ .

以上の条件を仮定すると次の定理が得られる。

**定理 1.** (P) の解  $(e, w)$  は一意に存在する。

以下、第3節で定理1における解の一意性を、第4節で解の存在性をそれぞれ証明する。

## 3. 一意性の証明

一意性の証明は [3], [4], [6] に詳細に述べられているが、本論文で改めてそれらの手法を紹介する。

本節を通して、各  $i$  ( $i = 1, 2$ ) に対して初期値を  $(e_{0,i}, w_{0,i})$  とする (P) の解を  $(e_i, w_i)$  で表す。ただし、初期値  $(e_{0,i}, w_{0,i})$  は (A3) と (A4) を満たすだけでなく、

$$\int_\Omega e_{0,1} = \int_\Omega e_{0,2} \quad (3.1)$$

を満たすとする. このとき,  $\theta_i = e_i - \lambda(w_i)$  とおくと

$$\langle e'_2(t) - e'_1(t), z \rangle + \int_{\Omega} \nabla \left( -\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_1} \right) (t) \cdot \nabla z = 0, \quad \forall z \in V, \quad \text{a.e. } t \in (0, T) \quad (3.2)$$

かつ

$$\begin{aligned} (w'_2(t) - w'_1(t), z) + \kappa \int_{\Omega} \nabla(w_2(t) - w_1(t)) \cdot \nabla z + (g(w_2(t)) - g(w_1(t)), z) \\ + \left( \frac{\lambda'(w_2(t))}{\theta_2(t)} - \frac{\lambda'(w_1(t))}{\theta_1(t)}, z \right) = 0, \quad \forall z \in V, \quad \text{a.e. } t \in (0, T) \end{aligned} \quad (3.3)$$

が成り立つ. まず, (1.5) かつ (3.1) より

$$\int_{\Omega} (e_2(t) - e_1(t)) = 0 \quad (3.4)$$

に注意すれば,  $e_2(t) - e_1(t) \in H_0(\subset V_0^*)$  が得られる. 従って,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|e_2(t) - e_1(t)\|_{0*}^2 + \|w_2(t) - w_1(t)\|_2^2 \right\} + \kappa \int_{\Omega} |\nabla(w_2(t) - w_1(t))|^2 \\ &= ((e'_2(t) - e'_1(t), e_2(t) - e_1(t)))_{0*} + (w'_2(t) - w'_1(t), w_2(t) - w_1(t)) \\ & \quad + \kappa \int_{\Omega} |\nabla(w_2(t) - w_1(t))|^2 \\ &= \langle e'_2(t) - e'_1(t), F_0^{-1}(e_2(t) - e_1(t)) \rangle_0 + (w'_2(t) - w'_1(t), w_2(t) - w_1(t)) \\ & \quad + \kappa \int_{\Omega} |\nabla(w_2(t) - w_1(t))|^2 \end{aligned}$$

が得られる. ここで, (3.2) において  $z = F_0^{-1}(e_2(t) - e_1(t))$  を代入し, 関数  $\alpha(r) = -\frac{1}{r}$  ( $r > 0$ ) の単調増加性と (3.4), 更に,

$$\langle z^*, v \rangle_0 = \langle z^*, v \rangle, \quad \forall z^* \in V_0^*, \quad \forall v \in V_0$$

を利用すれば,

$$\begin{aligned} & \langle e'_2(t) - e'_1(t), F_0^{-1}(e_2(t) - e_1(t)) \rangle \\ &= \langle e'_2(t) - e'_1(t), F_0^{-1}(e_2(t) - e_1(t)) \rangle_0 \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \left( -\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_1} \right) (t) \cdot \nabla F_0^{-1}(e_2(t) - e_1(t)) \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \left[ \left( -\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_1} \right) (t) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{\theta_2(t)} + \frac{1}{\theta_1(t)} \right) \right] \cdot \nabla F_0^{-1}(e_2(t) - e_1(t)) \\ &= - \left( F_0^{-1}(e_2(t) - e_1(t)), -\frac{1}{\theta_2(t)} + \frac{1}{\theta_1(t)} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{\theta_2(t)} + \frac{1}{\theta_1(t)} \right) \right)_{V_0} \\ &= - \left\langle e_2(t) - e_1(t), -\frac{1}{\theta_2(t)} + \frac{1}{\theta_1(t)} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{\theta_2(t)} + \frac{1}{\theta_1(t)} \right) \right\rangle_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(e_2(t) - e_1(t), -\frac{1}{\theta_2(t)} + \frac{1}{\theta_1(t)}\right) - \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} (e_2(t) - e_1(t))\right) \left(\int_{\Omega} \left(-\frac{1}{\theta_2(t)} + \frac{1}{\theta_1(t)}\right)\right) \\
&= -\left(\theta_2(t) - \theta_1(t), -\frac{1}{\theta_2(t)} + \frac{1}{\theta_1(t)}\right) - \left(\lambda(w_2(t)) - \lambda(w_1(t)), -\frac{1}{\theta_2(t)} + \frac{1}{\theta_1(t)}\right) \\
&\leq -\left(\lambda(w_2(t)) - \lambda(w_1(t)), -\frac{1}{\theta_2(t)} + \frac{1}{\theta_1(t)}\right)
\end{aligned}$$

が得られる。

一方, (3.3) において  $z = w_2(t) - w_1(t)$  を代入し, (2.4) を利用すれば,

$$\begin{aligned}
&(w_2'(t) - w_1'(t), w_2(t) - w_1(t)) + \kappa \int_{\Omega} |\nabla(w_2(t) - w_1(t))|^2 \\
&= -(g(w_2(t)) - g_1(t), w_2(t) - w_1(t)) - \left(\frac{\lambda'(w_2(t))}{\theta_2(t)} - \frac{\lambda'(w_1(t))}{\theta_1(t)}, w_2(t) - w_1(t)\right) \\
&\leq c_4 |w_2(t) - w_1(t)|_2^2 - \left(\frac{\lambda'(w_2(t))}{\theta_2(t)} - \frac{\lambda'(w_1(t))}{\theta_1(t)}, w_2(t) - w_1(t)\right)
\end{aligned}$$

が得られる。従って,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|e_2(t) - e_1(t)\|_{0*}^2 + |w_2(t) - w_1(t)|_2^2 \right\} + \kappa \int_{\Omega} |\nabla(w_2(t) - w_1(t))|^2 \\
&\leq c_4 |w_2(t) - w_1(t)|_2^2 + \int_{\Omega} \frac{\lambda(w_1(t)) - \lambda(w_2(t)) - \lambda'(w_2(t))(w_1(t) - w_2(t))}{\theta_2(t)} \\
&\quad + \int_{\Omega} \frac{\lambda(w_1(t)) - \lambda(w_2(t)) - \lambda'(w_2(t))(w_1(t) - w_2(t))}{\theta_2(t)}
\end{aligned}$$

が得られる。ここで,  $\lambda$  に対する Taylor 展開と (A1) を利用すれば,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|e_2(t) - e_1(t)\|_{0*}^2 + |w_2(t) - w_1(t)|_2^2 \right\} + \kappa \int_{\Omega} |\nabla(w_2(t) - w_1(t))|^2 \\
&\leq c_4 |w_2(t) - w_1(t)|_2^2 + |\lambda''|_{\infty} \left( \int_{\Omega} \frac{|w_2(t) - w_1(t)|^2}{\theta_2(t)} + \int_{\Omega} \frac{|w_2(t) - w_1(t)|^2}{\theta_1(t)} \right), \quad (3.5) \\
&\quad \text{a.e. } t \in (0, T)
\end{aligned}$$

が得られる。

一方, 次の補間不等式

$$|z|_{12/5} \leq |z|_2^{3/4} |z|_6^{1/4}, \quad \forall z \in L^6(\Omega)$$

と Sobolev の埋め込み定理

$$|z|_6 \leq c_7 \|z\|, \quad \forall z \in V \quad (3.6)$$

を利用すれば, 各  $i$  ( $i = 1, 2$ ) に対して,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{|w_2(t) - w_1(t)|^2}{\theta_i(t)} \\
& \leq \left\| \frac{1}{\theta_i(t)} \right\|_6 |w_2(t) - w_1(t)|_{12/5}^2 \\
& \leq c_7 \left\| \frac{1}{\theta_i(t)} \right\| |w_2(t) - w_1(t)|_2^{3/2} |w_2(t) - w_1(t)|_6^{1/2} \\
& \leq c_7^{3/2} \left\| \frac{1}{\theta_i(t)} \right\| |w_2(t) - w_1(t)|_2^{3/2} \|w_2(t) - w_1(t)\|^{1/2} \\
& \leq c_7^{3/2} \left\| \frac{1}{\theta_i(t)} \right\| \left\{ |w_2(t) - w_1(t)|_2^2 + |w_2(t) - w_1(t)|_2^{3/2} \left( \int_{\Omega} |\nabla(w_2(t) - w_1(t))|^2 \right)^{1/4} \right\} \\
& \leq \varepsilon \left( \int_{\Omega} |\nabla(w_2(t) - w_1(t))|^2 \right) + \frac{3c_7^2}{4(4\varepsilon)^{1/3}} \left\| \frac{1}{\theta_i(t)} \right\|^{4/3} |w_2(t) - w_1(t)|_2^2 \\
& \quad + c_7^{3/2} \left\| \frac{1}{\theta_i(t)} \right\| |w_2(t) - w_1(t)|_2^2 \\
& = \varepsilon \left( \int_{\Omega} |\nabla(w_2(t) - w_1(t))|^2 \right) + \left( c_7^{3/2} + \frac{3c_7^2}{4(4\varepsilon)^{1/3}} \right) \\
& \quad \times \left( \left\| \frac{1}{\theta_i(t)} \right\| + \left\| \frac{1}{\theta_i(t)} \right\|^{4/3} \right) |w_2(t) - w_1(t)|_2^2 \\
& \leq \varepsilon \left( \int_{\Omega} |\nabla(w_2(t) - w_1(t))|^2 \right) + \frac{13}{12} \left( c_7^{3/2} + \frac{3c_7^2}{4(4\varepsilon)^{1/3}} \right) \left( 1 + \left\| \frac{1}{\theta_i(t)} \right\|^2 \right) |w_2(t) - w_1(t)|_2^2
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って,  $\varepsilon = \frac{\kappa}{4|\lambda''|_{\infty}}$  として, (3.5) を利用すれば,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left\{ \|e_2(t) - e_1(t)\|_{0*}^2 + |w_2(t) - w_1(t)|_2^2 \right\} + \kappa \int_{\Omega} |\nabla(w_2(t) - w_1(t))|^2 \\
& \leq c_8 \left( 1 + \left\| \frac{1}{\theta_1(t)} \right\|^2 + \left\| \frac{1}{\theta_2(t)} \right\|^2 \right) |w_2(t) - w_1(t)|_2^2, \quad \text{a.e. } t \in (0, T)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

が得られる. ただし,

$$c_8 := c_4 + \frac{13|\lambda''|_{\infty}}{12} \left( c_7^{3/2} + \frac{3c_7^2|\lambda''|_{\infty}^{1/3}}{4\kappa^{1/3}} \right).$$

故に, (3.7) に対して Gronwall の補題を適用すれば,

$$\|e_2(t) - e_1(t)\|_{0*}^2 + |w_2(t) - w_1(t)|_2^2 + \kappa \int_0^t ds \int_{\Omega} |\nabla(w_2(s) - w_1(s))|^2$$

$$\leq \left\{ \|e_{0,2} - e_{0,1}\|_{0^*}^2 + \|w_{0,2} - w_{0,1}\|_2^2 \right\} \exp \left( c_8 \int_0^t \left( 1 + \left\| \frac{1}{\theta_1(s)} \right\|^2 + \left\| \frac{1}{\theta_2(s)} \right\|^2 \right) ds \right), \quad (3.8)$$

$$\forall t \in [0, T]$$

が成り立つ. (3.8) は (P) の解の一意性を保証する.  $\diamond$

**注意 3.1.** (A3) と (A4) を満たす初期値の列  $\{(e_{0,n}, w_{0,n})\}_{n \in \mathbb{N}}$  と初期値  $(e_0, w_0)$  を任意に選  
び出す. 今, それぞれの初期値に対応する (P) の解の列と解をそれぞれ  $\{(e_n, w_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  と  
 $(e, w)$  で表し,  $\theta_i = e_i - \lambda(w_i)$  かつ  $\theta = e - \lambda(w)$  とする. このとき,

$$e_{0,n} \longrightarrow e_0 \quad \text{in } V^* \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$w_{0,n} \longrightarrow w_0 \quad \text{in } H \quad (n \rightarrow \infty),$$

かつ,  $\left\{ \frac{1}{\theta_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \left\{ \frac{1}{\theta} \right\}$  が  $L^2(0, T; V)$  で有界ならば,

$$e_n \longrightarrow e \quad \text{in } C([0, T]; V^*) \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$w_n \longrightarrow w \quad \text{in } C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

#### 4. 解の存在証明

初期値  $(\theta_0, w_0)$  を次の条件を満たす点列  $\{(\theta_{0,n}, w_{0,n})\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H \times H^2(\Omega)$  で近似する.

$$(C1) \quad \left\{ \frac{1}{\theta_{0,n}} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} |\int_{\Omega} (-\log \theta_{0,n})| < +\infty, \quad \theta_{0,n} \longrightarrow \theta_0 \quad \text{in } H \quad (n \rightarrow \infty).$$

$$(C2) \quad \{w_{0,n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \left\{ z \in H^2(\Omega) \mid \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 \quad \text{in } H^{1/2}(\Gamma) \right\}, \quad w_{0,n} \longrightarrow w_0 \quad \text{in } V \quad (n \rightarrow \infty).$$

ここで, 次の近似問題 (AP) を考える.

$$e'_n - \Delta \left( -\frac{1}{\theta_n} \right) = 0, \quad e_n = \theta_n + \lambda(w_n) \quad \text{a.e. in } Q_T, \quad (4.1)$$

$$w'_n - \kappa \Delta w_n + g(w_n) + \frac{\lambda'(w_n)}{\theta_n} = 0 \quad \text{a.e. in } Q_T, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left( -\frac{1}{\theta_n} \right) = \frac{\partial w_n}{\partial \nu} = 0 \quad \text{a.e. on } \Sigma_T, \quad (4.3)$$

$$e_n(0) = e_{0,n} := \theta_{0,n} + \lambda(w_{0,n}), \quad w_n(0) = w_{0,n} \quad \text{a.e. in } \Omega. \quad (4.4)$$

このとき, [4] の結果を適用すれば, (AP) の解  $(e_n, w_n)$  の一意存在性が得られる. 実際,  
(AP) は次の意味での一意解  $(e_n, w_n)$  を持つ.

$$(S1) \quad e_n \in W^{1,2}(0, T; V^*) \cap L^\infty(0, T; H).$$

$$(S2) \quad w_n \in W^{1,2}(0, T; H) \cap C([0, T]; V) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega)).$$

$$(S3) \quad \theta_n > 0 \quad \text{a.e. in } Q_T.$$



$$(S4) \quad \frac{1}{\theta_n} \in L^\infty(0, T; V).$$

(S5) (4.1) は次の意味で成り立つ :

$$\langle e'_n(t), z \rangle + \int_{\Omega} \nabla \left( -\frac{1}{\theta_n} \right) (t) \cdot \nabla z = 0, \quad \forall z \in V, \quad \text{a.e. } t \in (0, T). \quad (4.5)$$

(S6) (4.2) は次の意味で成り立つ :

$$(w'_n(t), z) + \kappa \int_{\Omega} \nabla w_n(t) \cdot \nabla z + \left( g(w_n(t)) + \frac{\lambda'(w_n(t))}{\theta_n(t)}, z \right) = 0, \quad (4.6)$$

$$\forall z \in V, \quad \text{a.e. } t \in (0, T).$$

$$(S7) \quad e_n(0) = e_{0,n}, \quad w_n(0) = w_{0,n}.$$

次に, 近似解の列  $\{(e_n, w_n)\}_{n \in \mathbf{N}}$  に対する  $n$  に無関係な一様評価を以下の補題で与える.

**補題 4.1.** (P) および (AP) における保存量を  $m_0$  および  $m_{0,n}$  でそれぞれ表す. つまり,

$$m_0 := \int_{\Omega} \{\theta_0 + \lambda(w_0)\}, \quad m_{0,n} := \int_{\Omega} \{\theta_{0,n} + \lambda(w_{0,n})\}, \quad \forall n \in \mathbf{N}. \quad (4.7)$$

このとき, 次の収束が成り立つ.

$$m_{0,n} \longrightarrow m_0 \quad \text{in } \mathbf{R} \quad (n \rightarrow \infty).$$

**証明.** Taylor 展開と (2.2) を利用すると,

$$\begin{aligned} & |m_{0,n} - m_0| \\ & \leq \int_{\Omega} |\theta_{0,n} - \theta_0| + \int_{\Omega} |\lambda(w_{0,n}) - \lambda(w_0)| \\ & \leq |\Omega|^{1/2} |\theta_{0,n} - \theta_0|_2 + |\lambda''|_{\infty} |w_{0,n} - w_0|_2^2 + \int_{\Omega} |\lambda'(w_0)| |w_{0,n} - w_0| \\ & \leq |\Omega|^{1/2} |\theta_{0,n} - \theta_0|_2 + |\lambda''|_{\infty} |w_{0,n} - w_0|_2^2 + c_2 (|w_0|_2 + |\Omega|^{1/2}) |w_{0,n} - w_0|_2 \end{aligned}$$

が得られる. 従って, (C1) と (C2) より本補題が得られた.  $\diamond$

**補題 4.2.** 次の一様評価を満たす正定数  $M_1$  が存在する :

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \|e_n(t)\|_* + \sup_{0 \leq t \leq T} \|w_n(t)\| + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|e'_n(s)\|_*^2 ds + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t |w'_n(s)|_2^2 ds \\ & + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t ds \int_{\Omega} \left| \nabla \left( -\frac{1}{\theta_n} \right) (s) \right|^2 \leq M_1, \quad \forall n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

**証明.** (4.5) に  $z = -\frac{1}{\theta_n(t)}$  を代入すると,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (-\log \theta_n(t)) - \int_{\Omega} \frac{\lambda'(w_n(t)) w'_n(t)}{\theta_n(t)} + \int_{\Omega} \left| \nabla \left( -\frac{1}{\theta_n} \right) (t) \right|^2 = 0, \quad \text{a.e. } t \in (0, T) \quad (4.8)$$

が得られる. 更に,  $z = F_0^{-1}e'_n(t)$  を代入すると,

$$\|e'_n(t)\|_{0*}^2 + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (-\log \theta_n(t)) - \int_{\Omega} \frac{\lambda'(w_n(t))w'_n(t)}{\theta_n(t)} = 0, \quad \text{a.e. } t \in (0, T) \quad (4.9)$$

が得られる.

一方, (4.6) に  $z = w'_n(t)$  を代入すると,

$$|w'_n(t)|_2^2 + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\kappa}{2} \int_{\Omega} |\nabla w_n(t)|^2 + \int_{\Omega} \hat{g}(w_n(t)) \right\} + \int_{\Omega} \frac{\lambda'(w_n(t))w'_n(t)}{\theta_n(t)} = 0, \quad (4.10)$$

$$\text{a.e. } t \in (0, T)$$

が得られる.

故に, (4.8) + (4.9) +  $2 \times$  (4.10) の結果を任意の区間  $[0, t] (\subset [0, T])$  上で積分すれば,

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\Omega} (-\log \theta_n(t)) + \kappa \int_{\Omega} |\nabla w_n(t)|^2 + 2 \int_{\Omega} \hat{g}(w_n(t)) + \int_0^t \|e'_n(s)\|_{0*}^2 ds + \int_0^t |w'_n(s)|_2^2 ds \\ & + \int_0^t ds \int_{\Omega} \left| \nabla \left( -\frac{1}{\theta_n} \right) (s) \right|^2 = 2 \int_{\Omega} (-\log \theta_{0,n}) + \kappa \int_{\Omega} |\nabla w_{0,n}|^2 + 2 \int_{\Omega} \hat{g}(w_{0,n}), \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

が得られる. ここで, (2.3), (2.7), (C1), (C2) より

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\Omega} (-\log \theta_n(t)) + \kappa \int_{\Omega} |\nabla w_n(t)|^2 + 2c_5 |w_n(t)|_4^4 + \int_0^t \|e'_n(s)\|_{0*}^2 ds \\ & + \int_0^t |w'_n(s)|_2^2 ds + \int_0^t ds \int_{\Omega} \left| \nabla \left( -\frac{1}{\theta_n} \right) (s) \right|^2 \leq C_1, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

を満たす正定数  $C_1$  が存在する.

更に, [2] で得られている次の評価式

$$\exists C_2 > 0, \exists C_3 > 0 \quad \text{s.t.} \quad \int_{\Omega} (-\log z) \geq -C_2 \|z\|_* - C_3, \quad \forall z \in H \quad (4.11)$$

とコンパクトな埋め込み  $H \hookrightarrow V^*$  および (2.1) を利用すれば,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (-\log \theta_n(t)) \\ & \geq -C_2 \|\theta_n(t)\|_* - C_3 \\ & \geq -C_2 \|e_n(t)\|_* - C_2 \|\lambda(w_n(t))\|_* - C_3 \\ & \geq -C_2 \|e_n(t)\|_* - C_2 C_4 |\lambda(w_n(t))|_2 - C_3 \\ & \geq -C_2 \int_0^t \|e'_n(s)\|_* ds - C_2 \|e_{0,n}\|_* - \sqrt{2} c_1 C_2 C_4 |w_n(t)|_4^2 - \sqrt{2} c_1 C_4 |\Omega|^{1/2} - C_3 \\ & \geq -C_2 \int_0^t \|e'_n(s)\|_{0*} ds - C_2 C_4 |e_{0,n}|_2 - \frac{c_5}{2} |w_n(t)|_4^4 - \frac{c_1^2 C_2^2 C_4^2}{c_5} - \sqrt{2} c_1 C_4 |\Omega|^{1/2} - C_3 \\ & \geq -\frac{1}{4} \int_0^t \|e'_n(s)\|_{0*}^2 ds - C_2^2 T - C_2 C_4 |e_{0,n}|_2 - \frac{c_5}{2} |w_n(t)|_4^4 - \frac{c_1^2 C_2^2 C_4^2}{c_5} - \sqrt{2} c_1 C_4 |\Omega|^{1/2} - C_3 \end{aligned}$$

が得られる。従って,

$$e_{0,n} = \theta_{0,n} + \lambda(w_{0,n}) \longrightarrow \theta_0 + \lambda(w_0) \quad \text{in } H \quad (n \rightarrow \infty)$$

なので,

$$\begin{aligned} & \kappa \int_{\Omega} |\nabla w_n(t)|^2 + c_5 |w_n(t)|_4^4 + \frac{1}{2} \int_0^t \|e'_n(s)\|_{0*}^2 ds + \int_0^t |w'_n(s)|_2^2 ds \\ & + \int_0^t ds \int_{\Omega} \left| \nabla \left( -\frac{1}{\theta_n} \right) (t) \right|^2 \leq C_5, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

を満たす正定数  $C_5$  が存在する。ここで,

$$\|z^*\|_* \leq \|z^*\|_{0*}, \quad \forall z^* \in V_0^*$$

に注意すれば, 上記の評価式は本補題を意味する.  $\diamond$

**補題 4.3.** 次の一様評価を満たす正定数  $M_i$  ( $i = 2, 3$ ) が存在する :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_{\Omega} (-\log \theta_n(t)) \right| \leq M_2, \quad (4.12)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\theta_n(t)|_1 \leq M_3, \quad (4.13)$$

**証明.** (2.1), Sobolev の埋め込み定理  $V \hookrightarrow L^4(\Omega)$  と (4.11) を再び利用すれば, ある正定数  $C_6$  が存在して,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (-\log \theta_n(t)) \right| & \leq \int_{\Omega} (-\log \theta_n(t)) + 2(C_2 \|\theta_n(t)\|_* + C_3) \\ & \leq \int_{\Omega} (-\log \theta_n(t)) + C_6 (\|e_n(t)\|_* + \|w_n(t)\|^2 + 1) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで, 補題 4.2 を適用すれば, (4.12) が得られる。

次に, (4.7) かつ (2.1) より,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \theta_n(t) & = m_{0,n} - \int_{\Omega} \lambda(w_n(t)) \\ & \leq |m_{0,n}| + \int_{\Omega} |\lambda(w_n(t))| \\ & \leq |m_{0,n}| + c_1 (\|w_n(t)\|_2^2 + |\Omega|) \end{aligned}$$

なので, 補題 4.1 と補題 4.2 を適用すれば, (4.13) が得られる.  $\diamond$

補題 4.3 より, 剣持の補題 [5] を適用すれば, 次の補題が得られる。本論文では証明を省略する。なお, 詳細な証明については [3] を参照するとよい。

**補題 4.4.** 次の一様評価を満たす正定数  $M_4$  が存在する :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \left\| \frac{1}{\theta_n(s)} \right\| ds \leq M_4, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

補題 4.5. 次の一様評価を満たす正定数  $M_5$  が存在する :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|w_n(s)\|_{H^2(\Omega)}^2 ds \leq M_5, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

証明. (4.2) より,

$$\kappa \Delta w_n = w'_n + g(w_n) + \frac{\lambda'(w_n)}{\theta_n} \quad \text{a.e. in } Q_T \quad (4.14)$$

である. ここで, (2.3) かつ (3.6) を利用すれば,

$$\begin{aligned} |g(w_n(t))|_2 &= \left( \int_{\Omega} |g(w_n(t))|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2} c_3 (|w_n(t)|_6^3 + |\Omega|) \\ &\leq \sqrt{2} c_3 (c_7 \|w_n(t)\|^3 + |\Omega|) \end{aligned}$$

が得られる. 従って, 補題 4.2 より, ある正定数  $C_7$  が存在して次の一様評価が成り立つ:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |g(w_n(t))|_2 \leq C_7, \quad \forall n \in \mathbf{R}. \quad (4.15)$$

次に, 再度 (3.6) と Sobolev の埋め込み定理  $V \hookrightarrow L^3(\Omega)$  を利用すれば, (2.2) より

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda'(w_n(t))}{\theta_n(t)} \right| &= \left( \int_{\Omega} \frac{|\lambda'(w_n(t))|^2}{|\theta_n(t)|^2} \right)^{1/2} \\ &\leq \left| \frac{1}{\theta_n(t)} \right|_6 \left( \int_{\Omega} |\lambda'(w_n(t))|^3 \right)^{1/3} \\ &\leq c_2 c_7 \left\| \frac{1}{\theta_n(t)} \right\| \left( \int_{\Omega} (|w_n(t)|^3 + 1)^3 \right)^{1/3} \\ &\leq 4^{1/3} c_2 c_7 \left\| \frac{1}{\theta_n(t)} \right\| (|w_n(t)|_3 + |\Omega|^{1/3}) \\ &\leq 4^{1/3} c_2 c_7 (C_8 \|w_n(t)\| + |\Omega|^{1/3}) \left\| \frac{1}{\theta_n(t)} \right\| \end{aligned}$$

が得られる. 従って, 補題 4.2 と補題 4.4 を適用すれば, ある正定数  $C_9$  が存在して次の一様評価を満たす:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \left| \frac{\lambda'(w_n(s))}{\theta_n(s)} \right|_2^2 ds \leq C_9, \quad \forall n \in \mathbf{N}. \quad (4.16)$$

(4.14) – (4.16) に注意するとともに, 補題 4.2 で得られている  $w'_n$  の  $L^2(0, T; H)$  における一様評価を利用すれば,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t |\Delta w_n(s)|_2^2 ds \leq C_{10}, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

を満たす正定数  $C_{10}$  が存在する. ここで, [1; Proposition 2.9] を適用すれば, 本補題が得られる.  $\diamond$

補題 4.6. 次の一様評価を満たす正定数  $M_6$  が存在する :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\theta_n(t)|_2 \leq M_6, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

証明. 証明中で実施される計算は形式的であり, 本来は関数  $\alpha(r) := -\frac{1}{r}$  ( $r > 0$ ),  $\lambda, g$  を適切に近似して, それに対応した近似問題に対して実行されるべきものである. しかし, 本論文ではその部分を省略し, 詳細な証明は [4] に委ねることとする.

まず, (4.6) に  $z = \theta_n(t)$  を代入すると,  $\alpha(r) := -\frac{1}{r}$  ( $r > 0$ ) の単調増加性より,

$$\frac{d}{dt} |\theta_n(t)|_2^2 \leq 2 \int_{\Omega} |\lambda'(w_n(t))| |w'_n(t)| |\theta_n(t)|, \quad \text{a.e. } t \in (0, T)$$

が得られる. ここで, (右辺) の積分を Sobolev の埋め込み定理  $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$  を利用して, 次のように評価する.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\lambda'(w_n(t))| |w'_n(t)| |\theta_n(t)| \\ & \leq c_2 \left( \int_{\Omega} |w_n(t)| |w'_n(t)| |\theta_n(t)| + \int_{\Omega} |w'_n(t)| |\theta_n(t)| \right) \\ & \leq c_2 (|w_n(t)|_\infty |w'_n(t)|_2 |\theta_n(t)|_2 + |w'_n(t)|_2 |\theta_n(t)|_2) \\ & \leq c_2 (C_{11} \|w_n(t)\|_{H^2(\Omega)} |w'_n(t)|_2 |\theta_n(t)|_2 + |w'_n(t)|_2 |\theta_n(t)|_2) \\ & \leq c_2^2 (C_{11} \|w_n(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + 1) |\theta_n(t)|_2^2 + \frac{1}{2} |w'_n(t)|_2^2. \end{aligned}$$

従って, 適当な正定数  $C_{12}$  に対して, 次の評価が成り立つ :

$$\frac{d}{dt} |\theta_n(t)|_2^2 \leq C_{12} (\|w_n(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + 1) |\theta_n(t)|_2^2 + |w'_n(t)|_2^2, \quad \text{a.e. } t \in (0, T).$$

ここで, Gronwall の補題を適用すれば,

$$\begin{aligned} |\theta_n(t)|_2^2 & \leq |\theta_{0,n}|_2^2 \exp \left( C_{12} \int_0^t (\|w_n(s)\|_{H^2(\Omega)}^2 + 1) ds \right) \\ & + \int_0^t |w'_n(s)|_2^2 \exp \left( C_{12} \int_s^t (\|w_n(\sigma)\|_{H^2(\Omega)}^2 + 1) d\sigma \right) ds, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

を得ることが出来る. 従って, 補題 4.2 と補題 4.5 を用いれば, 本補題が得られる.  $\diamond$

補題 4.2 – 4.6 で得られた一様評価を利用して, (P) の解の存在性を示す.

解の存在証明. 補題 4.2 – 4.6 で得られた一様評価を利用すれば, 次の収束を満足する部分列  $\{n_k\}_{k \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{N}$  と関数  $\theta, w, \bar{\alpha}$  を選び出すことができる :

$$\theta_k := \theta_{n_k} \longrightarrow \theta \quad \begin{cases} \text{weakly in } W^{1,2}(0, T; V^*), \\ \text{strongly in } C([0, T]; V^*), \\ \star\text{-weakly in } L^\infty(0, T; H), \end{cases} \quad (k \rightarrow \infty),$$

$$w_k := w_{n_k} \longrightarrow w \quad \begin{cases} \text{weakly in } W^{1,2}(0, T; H), \\ \text{strongly in } C([0, T]; H), \\ \star\text{-weakly in } L^\infty(0, T; V), \\ \text{weakly in } L^2(0, T; H^2(\Omega)), \end{cases} \quad (k \rightarrow \infty),$$

$$-\frac{1}{\theta_k} \longrightarrow \tilde{\alpha} \quad \text{weakly in } L^2(0, T; V), \quad (k \rightarrow \infty).$$

更に, (A1) かつ (A2) より, Lebesgue の収束定理が利用でき, 結果として次の収束を得ることが出来る:

$$\begin{aligned} \lambda(w_k) &\longrightarrow \lambda(w) && \text{strongly in } L^2(0, T; H), \\ \lambda'(w_k) &\longrightarrow \lambda'(w) && \text{strongly in } L^2(0, T; H), \\ g(w_k) &\longrightarrow g(w) && \text{strongly in } L^2(0, T; H), \quad (k \rightarrow \infty). \\ \lambda'(w_k)w'_k &\longrightarrow \lambda'(w)w' && \text{weakly in } L^2(0, T; H), \\ -\frac{\lambda'(w_k)}{\theta_k} &\longrightarrow \tilde{\alpha}\lambda'(w) && \text{weakly in } L^2(0, T; H), \end{aligned}$$

従って,  $(\theta, w, \tilde{\alpha})$  は明らかに次を満たす:

$$\langle \theta'(t), z \rangle + (\lambda'(w(t))w'(t), z) + \int_{\Omega} \nabla \tilde{\alpha}(t) \cdot \nabla z = 0, \quad \forall z \in V, \quad \text{a.e. } t \in (0, T),$$

$$\begin{aligned} (w'(t), z) + \kappa \int_{\Omega} \nabla w(t) \cdot \nabla z + (g(w(t)) - \tilde{\alpha}(t)\lambda'(w(t)), z) &= 0, \\ \forall z \in V, \quad \text{a.e. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad w(0) = w_0 \quad \text{a.e. in } \Omega.$$

結局,  $\tilde{\alpha} = -\frac{1}{\theta}$  であることを示せば十分であることがわかる. 実際, [1] の手法を用いた [4] に述べられている証明方法を紹介する. まず,  $L^2(0, T; H)$  上の作用素  $\alpha$  を次のように定義する:

$$\forall v \in L^2(0, T; H), \quad [\alpha(v)](x, t) = -\frac{1}{v(x, t)}, \quad \forall (x, t) \in Q_T.$$

このとき, 作用素  $\alpha$  は  $L^2(0, T; H)$  上の一価極大単調作用素である.

今,  $\alpha(v) \in L^2(0, T; H)$  を満たす  $v \in L^2(0, T; H)$  を任意に取り出すと,

$$\int_0^T \left( -\frac{1}{\theta_k(t)} + \frac{1}{v(t)}, \theta_k(t) - v(t) \right) dt \geq 0,$$

つまり,

$$\int_0^T \left\{ \left\langle \theta_k(t), -\frac{1}{\theta_k(t)} \right\rangle - \left\langle v(t), -\frac{1}{\theta_k(t)} \right\rangle \right\} dt \geq \int_0^T \left\{ \left\langle -\frac{1}{v(t)}, \theta_k(t) \right\rangle - \left\langle -\frac{1}{v(t)}, v(t) \right\rangle \right\} dt$$

が成り立つ。ここで、 $k \rightarrow \infty$  とすれば、

$$\int_0^T \{ \langle \theta(t), \tilde{\alpha}(t) \rangle - \langle v(t), \tilde{\alpha}(t) \rangle \} dt \geq \int_0^T \left\{ \left( -\frac{1}{v(t)}, \theta(t) \right) - \left( -\frac{1}{v(t)}, v(t) \right) \right\} dt,$$

つまり、

$$\int_0^T \left( \tilde{\alpha}(t) + \frac{1}{v(t)}, \theta(t) - v(t) \right) dt \geq 0$$

が得られる。従って、 $\tilde{\alpha} = \alpha(\theta) = -\frac{1}{\theta}$  でなければならない。

◇

## 参考文献

- [1] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1976.
- [2] A. Damlamian and N. Kenmochi, *Evolution equations generated by subdifferentials in the dual space of  $H^1(\Omega)$* , Discrete Continuous Dynamical Systems **5** (1999) 269-278.
- [3] A. Ito, N. Kenmochi, and M. Kubo, *Non-isothermal phase transition models with Neumann boundary conditions*, Nonlinear Analysis **53** (2003) 977-996.
- [4] A. Ito and T. Suzuki, *Asymptotic behavior of the solutions to the non-isothermal phase field equation*, to appear in Nonlinear Analysis.
- [5] N. Kenmochi, *Neumann problems for a class of nonlinear degenerate parabolic equations*, Differential and Integral Equations **3** (1990) 253-273.
- [6] N. Kenmochi and M. Kubo, *Weak solutions of nonlinear systems for non-isothermal phase transitions*, Adv. Math. Sci. Appl. **9** (1999) 499-521.
- [7] O. Penrose and P.C. Fife, *Thermodynamically consistent models of phase-field type for the kinetics of phase transitions*, Physica D **43** (1990) 44-62.